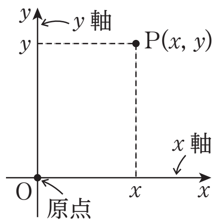
第 4 講　極座標と極方程式

PART1 極座標と直交座標

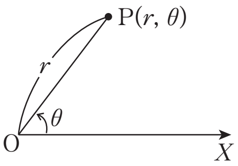
要点整理と公式

要点 ① 極座標

これまで平面上の点の位置は，原点 O で直交する 2 つの軸 (x 軸，y 軸) をとり，x 座標と y 座標の組 $(x,\ y)$ で表してきた。これを「　　　　　　」という。ここでは，これと異なる平面上の点の表し方を考える。



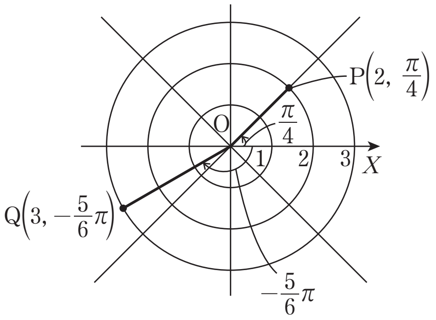
平面上に点 O と半直線 OX を定めると，平面上の点 P の位置は，OP の長さ r と，OX から OP へ測った角 θ で決まる。このとき，2 つの数の組 (　,　) を，点 P の「　　　　」といい，点 O を「　　」，半直線 OX を「始線」，θ を「　　　」という。なお，θ は弧度法で表された一般角である。



極座標で表された 2 点

$$\mathrm{P}\left(2,\ \frac{\pi}{4}\right),\ \mathrm{Q}\left(3,\ -\frac{5}{6}\pi\right)$$

を図示すると右の図のようになる。



極座標では $(r,\ \theta)$ と $(r,\ \theta+2\pi\times n)$ (n は整数) は同じ点を表す。よって，偏角 θ の範囲を $0 \leqq \theta < 2\pi$ のように制限すると，1 通りに定まる。

極 O を極座標で表すと，$(0,\ \theta)$ (θ は任意の値) となる。

※極座標 $(r,\ \theta)$ においては，一般的には $r \geqq 0$ であるが，後述の極方程式においては，$r<0$ の場合も考える。

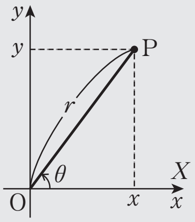
要点② 極座標と直交座標

極座標と直交座標には，三角関数の定義より以下の①，②の関係が成り立つ。

極座標と直交座標①

点Pの直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とする。

$$① \begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$$

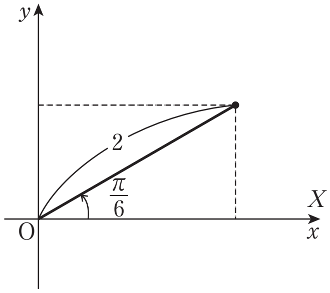


(ex) 極座標が $\left(2,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$ である点の直交座標

$$x = 2 \qquad = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$y = 2 \qquad = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

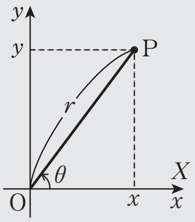
よって　$(\sqrt{3},\ 1)$



極座標と直交座標②

点Pの直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とする。

$$② \begin{cases} r = \\ \cos\theta = \qquad,\quad \sin\theta = \end{cases}$$



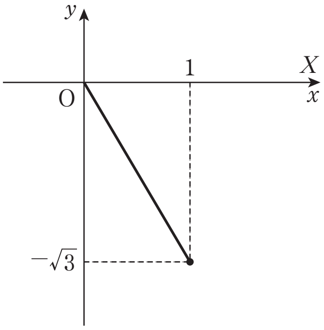
(ex) 直交座標が $(1,\ -\sqrt{3})$ である点の極座標 $(r,\ \theta)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$

$r = \qquad\qquad\qquad = 2$

よって $\cos\theta = \qquad,\ \sin\theta =$

これを満たす $\theta\,(0 \leqq \theta < 2\pi)$ は $\theta = \dfrac{5}{3}\pi$

したがって　$\left(2,\ \dfrac{5}{3}\pi\right)$



1 (1) 極座標が次のような点の直交座標を求めよ。

(i) $\left(4,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$　　(ii) $(2,\ \pi)$　　(iii) $\left(3,\ -\dfrac{\pi}{4}\right)$

(2) 直交座標が次のような点の極座標 $(r,\ \theta)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ を求めよ。

(i) $(-1,\ -1)$　　(ii) $(0,\ -3)$　　(iii) $(\sqrt{6},\ -\sqrt{2})$

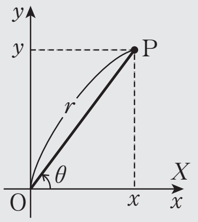
Point Pickup

極座標と直交座標

点 P の直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とする。

$(r,\ \theta) \to (x,\ y)$ … $\begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$

$(x,\ y) \to (r,\ \theta)$ … $\begin{cases} r = \\ \cos\theta = \quad ,\ \sin\theta = \end{cases}$



第 4 講 PART1 確認問題

極座標が次のような点の直交座標を求めよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

1 $\left(2,\ \frac{\pi}{4}\right)$ ア

① $(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$ ② $(2,\ \sqrt{3})$

③ $(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$ ④ $(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$

2 $(3,\ \pi)$ イ

① $(0,\ 3)$ ② $(0,\ -3)$

③ $(3,\ 0)$ ④ $(-3,\ 0)$

3 $\left(4,\ -\frac{\pi}{6}\right)$ ウ

① $(1,\ -\sqrt{3})$ ② $(\sqrt{3},\ -1)$

③ $(2,\ -2\sqrt{3})$ ④ $(2\sqrt{3},\ -2)$

直交座標が次のような点の極座標 $(r,\ \theta)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ を求めよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

4 $(-1,\ \sqrt{3})$ エ

① $\left(1,\ \frac{\pi}{3}\right)$ ② $\left(1,\ \frac{2}{3}\pi\right)$

③ $\left(2,\ \frac{2}{3}\pi\right)$ ④ $\left(2,\ \frac{5}{6}\pi\right)$

5 $(0,\ 4)$ オ

① $\left(2,\ \frac{\pi}{2}\right)$ ② $\left(4,\ \frac{\pi}{2}\right)$

③ $(2,\ \pi)$ ④ $(4,\ \pi)$

6 $(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$ カ

① $\left(1,\ \frac{3}{4}\pi\right)$　② $\left(\sqrt{2},\ \frac{5}{4}\pi\right)$

③ $\left(2,\ \frac{5}{4}\pi\right)$　④ $\left(2,\ \frac{7}{4}\pi\right)$

[MEMO]

第 4 講　極座標と極方程式

PART1 極座標と直交座標

1　(1)　極座標が次のような点の直交座標を求めよ。

(i)　$\left(4,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$　　(ii)　$(2,\ \pi)$　　(iii)　$\left(3,\ -\dfrac{\pi}{4}\right)$

(2)　直交座標が次のような点の極座標 $(r,\ \theta)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ を求めよ。

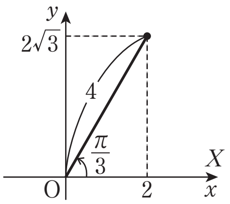
(i)　$(-1,\ -1)$　　(ii)　$(0,\ -3)$　　(iii)　$(\sqrt{6},\ -\sqrt{2})$

[解答]

(1)(i)　$x = 4\cos\dfrac{\pi}{3} = 4\cdot\dfrac{1}{2} = 2$

$y = 4\sin\dfrac{\pi}{3} = 4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

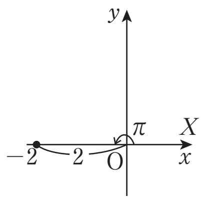
よって　$(2,\ 2\sqrt{3})$



(ii)　$x = 2\cos\pi = 2\cdot(-1) = -2$

$y = 2\sin\pi = 2\cdot 0 = 0$

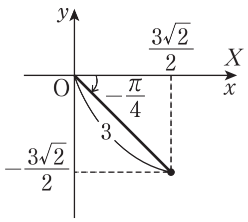
よって　$(-2,\ 0)$



(iii)　$x = 3\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = 3\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$y = 3\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = 3\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

よって　$\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

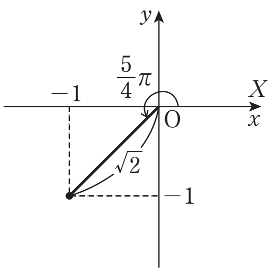


(2)(i)　$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

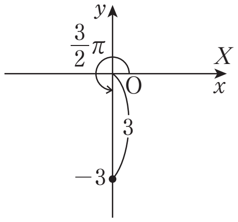
よって　$\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

これを満たす θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ は　$\theta = \dfrac{5}{4}\pi$

したがって　$\left(\sqrt{2},\ \dfrac{5}{4}\pi\right)$



(ii)　$r=\sqrt{0^2+(-3)^2}=\sqrt{9}=3$

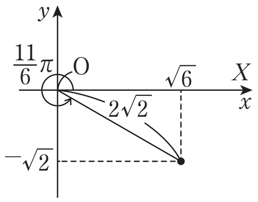


よって　$\cos\theta=\frac{0}{3}=0$，$\sin\theta=\frac{-3}{3}=-1$

これを満たす $\theta\,(0\leqq\theta<2\pi)$ は　$\theta=\frac{3}{2}\pi$

したがって $\left(3,\ \frac{3}{2}\pi\right)$

(iii)　$r=\sqrt{(\sqrt{6})^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$



よって　$\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=\frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$

これを満たす $\theta\,(0\leqq\theta<2\pi)$ は　$\theta=\frac{11}{6}\pi$

したがって $\left(2\sqrt{2},\ \frac{11}{6}\pi\right)$

第 4 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：①

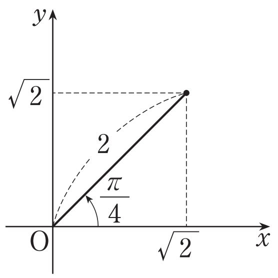
[解説]

直交座標を $(x,\ y)$ とすると，

$$x=2\cos\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\quad \text{[A]}$$

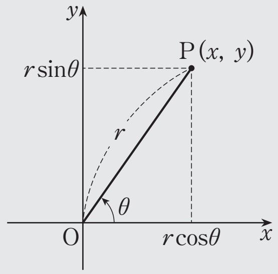
$$y=2\sin\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

よって，直交座標は，$(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$



[A]　点Pの直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，

$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$



2

[正解] イ：④

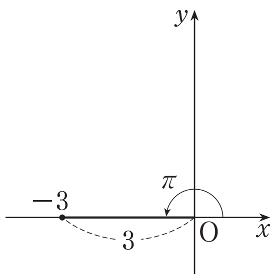
[解説]

直交座標を $(x,\ y)$ とすると，

$$x=3\cos\pi=3\cdot(-1)=-3\quad \text{[B]}$$

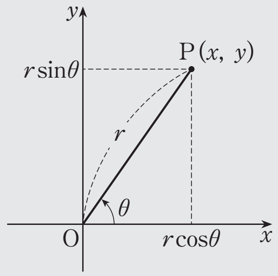
$$y=3\sin\pi=3\cdot 0=0$$

よって，直交座標は，$(-3,\ 0)$



[B]　点Pの直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，

$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$



3 [正解] ウ：④

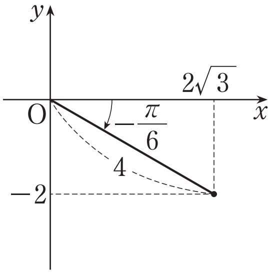
[解説]

直交座標を $(x,\ y)$ とすると，

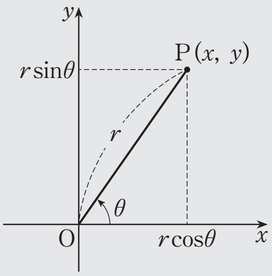
$$x=4\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$ [C]

$$y=4\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$$

よって，直交座標は，$(2\sqrt{3},\ -2)$



[C]　点Pの直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，
$x=r\cos\theta,\ \ y=r\sin\theta$



4 [正解] エ：③

[解説]

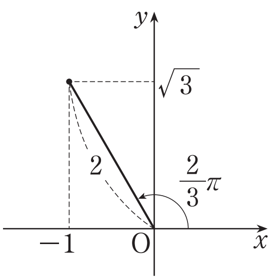
$$r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$$ [D]

よって，$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

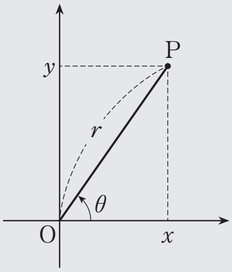
これを満たす θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ は，

$$\theta=\frac{2}{3}\pi$$

よって，極座標は，$\left(2,\ \dfrac{2}{3}\pi\right)$



[D]　点Pの直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，
$r=\sqrt{x^2+y^2}$
$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$



5　**[正解]** オ：②

[解説]

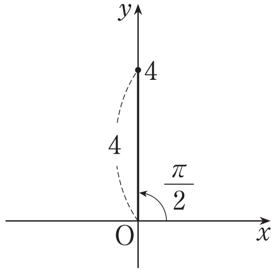
$$r=\sqrt{0^2+4^2}=4$$ [E]

よって，$\cos\theta=\dfrac{0}{4}=0$，$\sin\theta=\dfrac{4}{4}=1$

これを満たす θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ は，

$$\theta=\frac{\pi}{2}$$

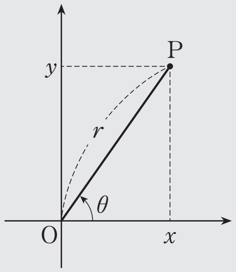
よって，極座標は，$\left(4,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$



[E]　点Pの直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r},\quad \sin\theta=\frac{y}{r}$$



6　**[正解]** カ：③

[解説]

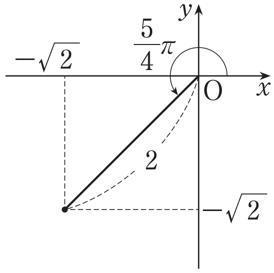
$$r=\sqrt{(-\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{4}=2$$ [F]

よって，$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

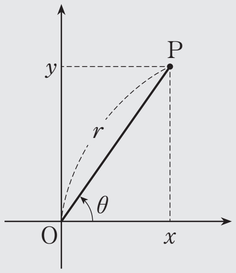
これを満たす θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ は，

$$\theta=\frac{5}{4}\pi$$

よって，極座標は，$\left(2,\ \dfrac{5}{4}\pi\right)$



[F]　点Pの直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r},\quad \sin\theta=\frac{y}{r}$$